

УДК 519.21

ББК В171

3-15

**3-15 ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
СТАТИСТИКЕ/** Составители: М.В. Ярощук, Н.В. Жарков – Нижний Новгород:
ННГУ, 2006. – 52с.

Составители: М.В. Ярощук, Н.В. Жарков.

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук, доцент **В.Н.Филиппов.**

Приводятся задачи для практических занятий по общему курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов 4 курса механико-математического факультета (специализация 01.01–Математика). Выполнение заданий позволит приобрести навыки и умения по решению задач теории вероятностей и математической статистики.

УДК 519.21

ББК В171

1. Из урны, содержащей 4 белых и 5 черных шаров, случайным образом без возвращения извлекают 2 шара. Найти вероятности следующих событий: $A=\{\text{извлечены два белых шара}\}$; $B=\{\text{извлечены шары разного цвета}\}$; $C=\{\text{среди извлеченных есть белый шар}\}$

2. В урне лежат 5 шаров, занумерованных от единицы до пяти. По схеме случайного выбора с возвращением из урны трижды вынимается шар. Найти вероятности следующих событий: $A=\{\text{трижды был извлечен шар с номером 5}\}$; $B=\{\text{трижды был извлечен один и тот же шар}\}$; $C=\{\text{ровно в двух случаях из трех был извлечен шар с номером 5}\}$; $D=\{\text{ровно в двух случаях из трех был извлечен шар с четным номером}\}$.

3. Код содержит четыре цифры. Предполагая, что код набирается наудачу, найти вероятности следующих событий: $A=\{\text{код не содержит одинаковых цифр}\}$; $B=\{\text{код содержит две одинаковые цифры}\}$; $C=\{\text{код содержит три одинаковые цифры}\}$; $D=\{\text{код содержит две пары одинаковых цифр}\}$; $E=\{\text{код состоит из одинаковых цифр}\}$; $F=\{\text{угадан код}\}$.

4. В поезде из 10 вагонов случайно оказались преступник и комиссар Мегрэ. Какова вероятность, что они находятся а) в одном вагоне; б) в соседних вагонах?

5. Группу из $2n$ юношей и $2n$ девушек наудачу разделили на две части. Найти вероятность, что в каждой части юношей и девушек поровну.

6. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые по жребию разбиваются на две группы по 10 человек. Найти вероятность того, что двое наиболее сильных игроков попадут в разные группы.

7. Из урны, содержащей три красных, два белых и один черный шар, по схеме случайного выбора без возвращения извлекают три шара. Найти вероятности следующих событий: $A=\{\text{извлечен черный шар}\}$; $B=\{\text{извлечены два красных и один белый шар}\}$; $C=\{\text{хотя бы один цвет не будет представлен в выборке}\}$.

8. Из карточек разрезной азбуки составлено слово ВЕРОЯТНОСТЬ. Затем из этих карточек случайным образом отобрано а) 3; б) 4; в) 5; г) 6. Найти вероятность того, что из отобранных карточек можно составить слова а) СОН; б) ТРОН; в) ТЕНОР; г) ОСТРОВ, ТРОСТЬ.

9. В урне содержится 3 белых и 7 черных шаров. Шары вынимают без возвращения. Какова вероятность того, что среди двух вынутых шаров ровно один белый? Какова вероятность того, что среди трех вынутых шаров хотя бы один белый?

10. Из колоды карт в 36 листов наудачу вынимается 4 карты. Найти вероятности того, что: а) все вынутые карты - дамы; б) вынули две дамы; в) все вынутые карты одной масти; г) все вынутые карты разных мастей.

11. Для выполнения лабораторной работы группа студентов из 10 девушек и 5 юношей разбивается на 5 равных подгрупп. Какова вероятность, что в каждой подгруппе будет юноша?

12. На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Опыт состоит в случайном выборе трех карточек и раскладывании их в порядке поступления в ряд слева направо. Найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{появится число } 123\}$; $B = \{\text{появится число, не содержащее цифры } 3\}$; $C = \{\text{появится число, содержащее цифру } 3\}$; $D = \{\text{появится четное число}\}$.

13. n мужчин и n женщин ($n \geq 3$) случайным образом рассаживаются в ряд на $2n$ мест. Найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{два лица одного пола не займут места рядом}\}$; $B = \{\text{все мужчины будут сидеть рядом}\}$.

14. Брошено три игральных кубика. Найти вероятности того, что: а) на всех кубиках выпали разные цифры; б) на двух кубиках выпали 5; в) хотя бы на одном кубике выпала 5; г) на первом кубике выпала 5; д) на всех кубиках выпало одинаковое число очков; е) сумма всех выпавших очков равна 5.

15. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года, считая, что вероятность попадания дня рождения каждого на любой месяц года одинакова.

16. Из кармана, в котором находятся 5 монет достоинством 10 копеек и 5 монет достоинством 5 копеек, вынимается пригоршня из 5 случайно взятых монет. Какова вероятность того, что в кармане осталась сумма денег, не меньшая той, что вынута?

17. Из полного набора костей домино вынимают две кости. Какова вероятность, что среди вынутых костей есть дубль?

18. Из колоды карт в 52 листа наудачу вынимается несколько карт. Какое минимальное число карт нужно извлечь, чтобы с вероятностью более 0,5 утверждать, что среди них будут карты одной масти?

19. Из отрезков, длины которых $1, 3, 5, \dots, 2n-1$, $n \geq 4$ наудачу выбирают три. Какова вероятность, что из них можно построить треугольник?

20. Из последовательности чисел $1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$ наудачу выбираются два числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше k , а другое больше k , где $1 \leq k \leq n$ - произвольное целое число?

21. Из множества чисел $E = \{1, 2, \dots, n\}$ выбирается два числа. Какова вероятность того, что второе число больше первого, если выбор осуществляется: а) без возвращения; б) с возвращением?

22. В группе 25 студентов. Считая, что вероятность попадания дня рождения каждого студента на любой день года одинакова и в году 365 дней, найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{у шести студентов день рождения зимой, у восьми - летом, у четырех - осенью, у остальных - весной}\}$; $B = \{\text{три человека родились 1 апреля}\}$; $C = \{\text{у четырех определенных человек день рождения в один день, а у остальных - в разные}\}$.

23. n человек рассаживаются на n мест ($n > 2$) случайным образом. Найти вероятность того, что 2 конкретных человека окажутся рядом, если они рассаживаются: а) на лавку; б) за круглый стол.

24. Определить вероятность того, что выбранное наудачу целое число N оканчивается единицей, при а) возведении в квадрат; б) возведении в четвертую степень; с) умножении на произвольное целое число.

25. Из множества натуральных чисел по схеме выбора с возвращением случайным образом выбирается два числа. Найти вероятность того, что остатки от деления каждого из них на заданное натуральное число k равны.

26. Каждая из n палок случайным образом ломается на две части – длинную и короткую. Затем $2n$ полученных обломков наудачу объединяются в n пар, каждая из которых образует новую палку. Найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{все обломки объединяются в первоначальном порядке}\}$; $B = \{\text{все длинные части объединяются с короткими}\}$.

27. В некотором государстве у всех жителей различные неповторяющиеся всевозможные наборы зубов (из 32 возможных). Найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{у наудачу выбранного человека 30 зубов}\}$; $B = \{\text{найти с первой попытки человека с заданным набором зубов}\}$.

28. При жеребьевке n человек тянут билеты с номерами $1, 2, \dots, n$. Первые три человека вытянули номера x_1, x_2, x_3 . Какова вероятность того, что $\min(x_1, x_2) < x_3 < \max(x_1, x_2)$?

29. По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1, 2, \dots, N\}$, $N \geq 4$ Выбираются числа X и Y . Что больше $P_2 = \{X^2 - Y^2 \text{ делится на } 2\}$ или $P_3 = \{X^2 - Y^2 \text{ делится на } 3\}$?

30. Деревянный брусок длиной 4м случайным образом распилили на 2 части. Найти вероятность того, что длины получившихся частей отличаются не более чем на 1 метр.

31. На плоскости проведены параллельные линии, расстояние между которыми попеременно равно 1.5 и 8 см. Определить вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса 2.5 см не будет пересечен ни одной линией.

32. В круге радиуса R проводятся хорды параллельно заданному направлению. Какова вероятность того, что длина наугад взятой хорды не более R , если равновозможны любые положения точек пересечения хорды с диаметром, перпендикулярным выбранному направлению?

33. В квадрат наудачу брошены три точки. Найти вероятность того, что они образуют вершины: а) какого-нибудь треугольника; б) правильного треугольника; в) прямоугольного треугольника.

34. На окружности наудачу выбраны три точки A, B , и C . Найти вероятность того, что треугольник ABC будет остроугольным.

35. Стержень длиной 200 мм случайным образом ломается на три части. Определить вероятности того, что: а) длина части стержня между изломами не превышает 10 мм; б) длина хотя бы одной части стержня не превышает 10 мм.

36. На отрезке OA длины L случайным образом поставлены две точки B и C . Найти вероятности того, что: а) Длина отрезка BC меньше расстояния от точки O до ближайшей к ней точки; б) длина отрезка BC меньше, чем $L/2$.

37. На плоскость с нанесенной на ней квадратной сеткой многократно бросается монета диаметра d , в результате чего установлено, что в 40% случаев монета не пересекает ни одной стороны квадрата. Оценить размер сетки.

38. Случайная точка A брошена в квадрат со стороной a . Найти вероятность того, что расстояние от A до ближайшей стороны квадрата меньше, чем расстояние от A до ближайшей диагонали квадрата.

39. На отрезке $[0,2]$ случайно выбираются две точки. Найти вероятность того, что минимальное расстояние от этих точек до начала координат больше 1.

40. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) равномерно распределена в единичном квадрате $[0,1] \times [0,1]$. Пусть η - число действительных корней многочлена

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \xi_1^2 x + \xi_2. \text{ Найти } P(\eta = k), k = 1, 2, 3.$$

41. *Задача Бюффона.* Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросается игла длины $2l$ ($l < a$). Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

42. В круг радиуса R вписан равносторонний треугольник. Найти вероятность того, что четыре точки, наугад поставленные в данном круге, окажутся внутри треугольника.

43. Из чисел 2, 3, 5 выбирается одно наудачу. Случайные события A_k - выбранное число делится на $k, k = 2, 3, 5$. Являются ли A_k попарно независимыми, независимыми в совокупности?

44. На каждом из пяти станков производятся болты и гайки в соотношении 2:3. Из продукции каждого станка последовательно взято по одной детали. Найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{все детали одного типа}\}$; $B = \{\text{детали первого и третьего станков - одного типа}\}$; $C = \{\text{детали второго и четвертого станков - разных типов}\}$; $D = \{\text{деталей одного типа больше чем другого в 4 раза}\}$; $E = \{\text{гаек не менее трех}\}$; $F = \{\text{выбрано подряд ровно три детали одного типа}\}$.

45. Из колоды в 36 карт наудачу выбирается одна. Найти вероятность того, что выбрана дама или карта червовой масти.

46. В урне три белых и три черных шара. По схеме случайного выбора без возвращения из урны извлекли три шара. Какова вероятность, что в урне осталось три черных шара, если известно, что среди вынутых есть белый шар?

47. Подбрасывается три монеты. Когда вероятнее угадать результат, если известно, что есть хотя бы две решки, или, если известно, что есть ровно два орла?

48. В урне четыре шара, причем цвет каждого шара с равной вероятностью белый или черный. Последовательно без возвращения вынимают все шары. Найти вероятность того, что все шары белые, если известно, что вынули по крайней мере два белых шара.

49. Какова вероятность, что при подбрасывании трех игральные костей выпали все разные грани, если известно, что хотя бы на одной кости выпало шесть очков.

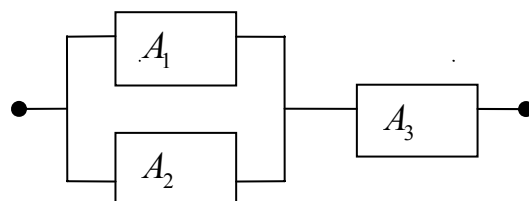
50. В урне два белых и три черных шара. Наудачу берут два шара. Найти вероятность того, что в урне остались два черных и один белый шар, если известно, что хотя бы один из вынутых шаров белый.

51. Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет герб. Какова вероятность, что монету придется подбрасывать а) ровно 5 раз; б) не менее 5 раз; в) не более 5 раз?

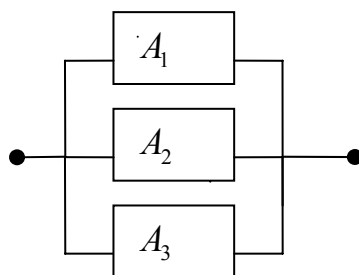
52. Прибор станет непригодным для работы в результате однократной поломки части A , или двукратной поломки части B , или трехкратной поломки части C . Часть A выходит из строя с вероятностью 0.15; часть B - с вероятностью 0.3; часть C - с вероятностью 0.55. Известно, что прибор ломался трижды. Какова вероятность, что прибор стал непригодным?

53. Электрическая цепь состоит из элементов A_1, A_2, A_3 . При выходе из строя любого элемента цепь в месте его включения разрывается. Вероятности выхода из строя за данный промежуток времени для каждого элемента соответственно равны 0.2; 0.2; 0.3. Предполагается, что элементы выходят или не выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что за рассматриваемый промежуток времени по цепи будет проходить ток, если схема соединения элементов имеет вид:

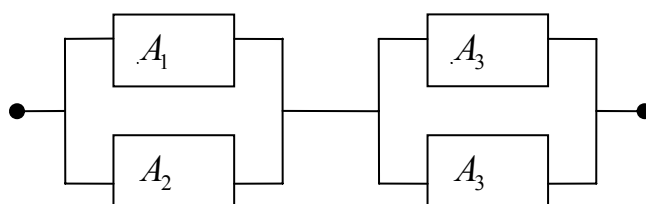
а)



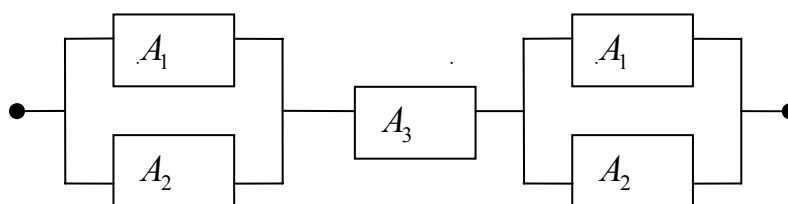
b)



c)



d)



54. В телефонном номере забыта последняя цифра. Она набирается наудачу. Найти вероятность того, что абонент дозвонится только с четвертой попытки.

55. Из колоды в 36 карт последовательно а) без возвращения; б) с возвращением извлекают 3 карты. Найти вероятность того, что будут извлечены туз червовой масти, дама и валет.

56. Для того чтобы разрушить мост, нужно попадание не менее двух бомб. Независимо сбросили три бомбы с вероятностями попадания 0.1; 0.3 и 0.4 соответственно. Какова вероятность того, что мост разрушен?

57. Вероятность безотказной работы i -го устройства прибора равна p_i , $i=1,2,3,4$. Найти вероятности: 1) выхода из строя только первого уст-

ройства; 2) выхода из строя одного из устройств; 3) выхода из строя хотя бы одного устройства.

58. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0.875. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

59. Два стрелка по очереди стреляют в мишень. Если не попадет один, то начинает стрелять другой. Найти вероятность того, что после трех выстрелов в мишени будет две пробоины, если вероятность попадания в мишень для первого стрелка, начинающего стрельбу равна 0.7, а для второго - 0.8.

60. Три игрока раздали между собой поровну 4 короля, 3 дамы и 2 валета. Какова вероятность того, что хотя бы у одного нет дамы?

61. *Задача о четырех лгунах.* Первый человек получает информацию, которую в виде условного сигнала передает далее второму, второй – третьему, третий - четвертому, а четвертый - наблюдателям. Каждый из них не лжет лишь в одном случае из трех. Найти вероятность того, что первый передал истинную информацию, если известно, что четвертый сообщил истинную информацию.

62. Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до первого попадания одним из них. Какова вероятность, что закончит игру первый, если вероятности попадания при каждом броске равны 0.6 для первого и 0.8 для второго?

63. Некто написал n писем, предназначенных n разным адресатам, на конвертах написал n адресов и случайно разложил письма по конвертам. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо нашло своего адресата.

64. *Задача де Мере.* Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.5, хотя бы один раз появилась сумма очков, равная 12?

65. Жюри состоит из трех судей. Первый и второй судьи принимают правильное решение независимо друг от друга с вероятностью p , а третий судья для принятия решения бросает монету. Окончательное решение принимается по большинству голосов. Какова вероятность того, что жюри примет правильное решение?

66. Жюри состоит из трех судей. Первый и второй судьи принимают правильное решение независимо друг от друга с вероятностью p , а третий судья поступает следующим образом: если двое первых судей принимают одинаковое решение, то третий к ним присоединяется, а в противном случае бросает монету. Какова вероятность правильного решения у такого жюри?

67. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее чем на три из четырех поставленных в билете вопросов. Взглянув на первый вопрос билета, студент обнаружил, что он его знает. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет?

68. Студент может уехать в институт или автобусом, который ходит через каждые 20 минут, или троллейбусом, который ходит через каждые 10 минут. Какова вероятность того, что студент, подошедший к остановке, уедет в течение ближайших 5 минут?

69. Пусть A и B - случайные события, причем $P(A) = 0.25$, а $P(B) = 0.8$. Оценить сверху и снизу $P(AB)$.

70. Имеется две урны, в каждой из которых по m белых и k черных шаров. Из первой урны наугад извлекают один шар и перекладывают во вторую. Найти вероятность того, что после перекладывания извлечен белый шар из второй урны.

71. В коробке находится 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наудачу берут 3 мяча, которые после игры возвращают в коробку. Для второй игры также наудачу берутся 3 мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые.

72. Производится посадка самолета на аэродром. Если позволяет погода, летчик сажает самолет, наблюдая за аэродромом визуально. В этом случае вероятность благополучной посадки p_1 . Если аэродром затянут облачностью, летчик сажает самолет по прибором. Вероятность безотказной работы приборов равна p . Если приборы сработали нормально, то самолет садится благополучно с той же вероятностью p_1 , что и при визуальной посадке. Если же приборы не сработали, то летчик может благополучно посадить самолет с вероятностью $p_2 < p_1$. Известно, что в $k\%$ случаев аэродром затянут облачностью. Самолет приземлился благополучно. Найти вероятность того, что летчик пользовался приборами.

73. В трех урнах имеются черные и белые шары. В первой урне-3 белых и 1 черный, во второй-6 белых и 4 черных, в третьей-9 белых и 1 черный шар. Из наугад выбранной урны случайным образом выбирается один шар. Найти вероятность того, что он белый.

74. На зачете представлены вопросы по 4 темам. По первой теме 7 вопросов, по второй -11, по третьей-13, по четвертой-9. Вероятность ответа на любой вопрос по i -ой теме p_i , $i=1,2,3,4$. Студенту задают один вопрос. Найти вероятность того, что студент сдаст зачет. Какова вероятность, что был задан вопрос из первой темы, если известно, что зачет не сдан?

75. В автобусе едут n пассажиров. На остановке каждый из них выходит с вероятностью p , кроме того, в автобус с вероятностью p_0 не входит ни один новый пассажир, а с вероятностью $1 - p_0$ входит один новый пассажир. Найти вероятность того, что после остановки в автобусе будет по-прежнему n пассажиров.

76. Имеется n экзаменационных вопросов. Студенту задается 2 вопроса, причем он знает ответ на k вопросов из общего числа. Для сдачи экзамена ему достаточно ответить на оба вопроса сразу или на один вопрос и на один вопрос из числа оставшихся. Найти вероятность того, что экзамен будет сдан.

77. Из чисел $1, 2, \dots, n$ одно за другим наудачу выбирают 2 числа. Найти вероятность того, что разность между первым и вторым числом будет не менее m ($m > 0$).

78. В урне лежит шар неизвестного цвета – с равной вероятностью белый или черный. В урну опускают один белый шар, и после перемешивания наудачу извлекается один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что в урне остался белый шар.

79. Есть 3 альбома, в каждом из которых по 10 фотографий. В первом – 4 цветные, во втором – 3 цветные, в третьем – 5 цветных. Из наудачу выбранного альбома взяли 2 фотографии: они оказались цветными. Какова вероятность того, что они были взяты из второго альбома?

80. Из двух близнецов первый мальчик. Найти вероятность того, что второй тоже мальчик, если среди близнецов вероятности рождения двух мальчиков и двух девочек соответственно равны a и b , а для разнополых близнецов вероятность рождения первым одинакова.

81. В страховой компании застраховано 40%, 50% и 10% страхователей трех групп. Вероятности наступления страхового случая у страхователей этих групп соответственно равны 0.3; 0.1 и 0.2. У страхователя наступил страховой случай. К какой из групп он вероятнее всего относится?

82. Есть четыре кубика с цифрами $1, 2, \dots, 6$ на гранях и одна правильная пирамида с цифрами $1, 2, 3, 4$ на гранях. Наугад выбрали предмет и подбросили. Выпала цифра 4. Какова вероятность того, что взяли кубик?

83. Из 12 лотерейных билетов 5 выигрышных. Билеты вытягивают по одному без возвращения. Во второй раз был вытянут выигрышный билет. Какова вероятность того, что и в первый раз был вытянут выигрышный билет?

84. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в

мишень для первого стрелка равна 0.8, для второго – 0.4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

85. В урне находится 3 черных и 2 белых шара. Первый игрок извлекает 3 шара. Обратно он возвращает черный шар, если среди вынутых шаров больше было черных, в противном случае возвращает белый шар. После этого второй игрок извлекает один шар. Найти вероятность того, что первый игрок не извлекал белых шаров, если известно, что второй игрок вытащил белый шар.

86. Два стрелка A и B поочередно стреляют в мишень. Вероятности попадания первым выстрелом для них равны соответственно 0.4 и 0.5, а вероятности попадания при следующих выстрелах для каждого увеличиваются на 0.05. Какова вероятность того, что первым стрелял A , если попадание в мишень произошло при пятом (в сумме) выстреле?

87. В урне n шаров, причем цвет каждого шара с равной вероятностью может быть белым или черным. Последовательно с возвращением извлекается k шаров. Какова вероятность того, что в урне были только белые шары, если черные шары не извлекались?

88. Шесть шаров, среди которых 3 белых и 3 черных, распределили по двум урнам. Наудачу выбирается урна, а из нее 1 шар. Как нужно распределить шары по урнам, чтобы вероятность события $A = \{\text{вынутый шар белый}\}$ была максимальна?

89. При переливании крови надо учитывать группы крови донора и больного. Человеку, имеющему 4 группу крови, можно перелить кровь любой группы; со 2-ой или 3-ей группой можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; а человеку с 1-ой группой - только 1-ую. Среди населения 33.7% имеют первую, 37.5% - вторую, 20.9% - третью, 7.9% - четвертую. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора. Какова вероятность того, что переливание можно осуществить, если имеются два донора?

90. У рыбака имеется три любимых места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на i -ом месте, то рыба клюет с вероятностью p_i , $i = 1, 2, 3$. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку, а рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

91. Из 28 костей домино случайно выбрана одна. Построить ряд и функцию распределения суммы очков на половинках этой кости.

92. Игральный кубик подбрасывают 4 раза. Случайная величина ξ - число выпавших «6» на верхней грани кубика. Построить ряд распределения случайной величины ξ .

93. В партии из n изделий одно бракованное. Из партии поочередно проверяют по одному изделию до обнаружения брака. Построить ряд распределения случайной величины ξ - общего числа проверенных изделий.

94. На экзамене студенту задаются вопросы, которые прекращаются, как только студент отвечает на данный вопрос. Вероятность ответа равна 0.1. Случайная величина ξ - число заданных вопросов. Построить ряд распределения этой случайной величины.

95. Имеется 10 деталей, из которых 6 качественных. Производится сборка прибора, для которого требуется 4 детали. Для этого наудачу отбирают 5 деталей (одну «про запас»). Случайная величина ξ - число качественных деталей из отобранных. Найти закон распределения этой случайной величины. Найти вероятность того, что сборку можно осуществить. Построить функцию распределения с.в. ξ .

96. Игральная кость, на гранях которой числа от 0 до 5 подбрасывают до тех пор, пока общая сумма не превзойдет 12. Чему вероятнее всего будет равна эта сумма?

97. *Задача Банаха.* Для прикуривания гражданин пользуется двумя коробками спичек, доставая наудачу тот или иной коробок. Через неко-

торое время он обнаружил, что один коробок пустой. Какова вероятность того, что во втором коробке ровно k спичек, если вначале в каждом было по n спичек?

98. Эксперимент состоит в подбрасывании игрального кубика. Найти вероятность того, что перед третьим выпадением четного числа очков будет 2 выпадения нечетного числа.

99. Сколько изюма должна в среднем содержать булочка, чтобы вероятность иметь хотя бы одну изюминку в булке была не менее 0.99, считая, что случайная величина ξ - число изюминок в булочке, распределена по закону Пуассона.

100. *Задача Джона Смита (1693 г.)*. Одинаковы ли шансы на успех у трех человек, если первому надо получить хотя бы одну «6» при шести бросаниях игральной кости; второму - не менее двух «6» при 12 бросаниях игральной кости; третьему - не менее трех «6» при 18 бросаниях игральной кости?

101. В одной аудитории экзамен сдают 7 человек, среди которых 3 отличника, в другой- 9 человек, среди которых 2 отличника. Из первой вызывают 2-х человек, из второй-1-ого. Случайная величина ξ - общее число отличников среди вызванных. Построить ряд распределения этой случайной величины.

102. Вероятность того, что в справочное бюро в течение часа обратятся k человек равна $\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$, $\lambda > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Для каждого человека вероятность отказа равна p . Найти вероятность того, что в течение часа s человек ($s \leq k$) не получат ответа на вопрос.

103. Из урны, содержащей 3 красных, 3 желтых и 3 зеленых шара вынимают по 2 шара с возвращением до тех пор, пока не достанут 2 шара одного цвета. Случайная величина ξ - число произведенных извлечений. Найти закон распределения этой случайной величины.

104. Стрелок ведет стрельбу по мишени до второго попадания, имея 4 патрона. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.6. Построить ряд и функцию распределения случайной величины ξ - числа затраченных патронов.

105. Кубик, одна из граней которого стерта, подбрасывают 2 раза. Случайная величина ξ - число выпадений четного числа очков. Построить ряд распределения этой случайной величины.

106. Игральный кубик подбрасывают 5 раз. Случайная величина ξ - общее число подбрасываний до второго подряд выпадения «6». Построить ряд распределения этой случайной величины.

107. В урне было 6 белых и 4 черных шара. Один потеряли. Из урны вынимают 3 шара. Случайная величина ξ - число белых шаров среди вынутых. Построить ряд распределения этой случайной величины.

108. Монету бросают ξ раз - до тех пор, пока хотя бы одна из ее сторон не выпадет дважды (не обязательно подряд). Составить ряд распределения с.в., построить график функции распределения.

109. Существует ли значение константы c такое, что функция $f(x)$ служит плотностью вероятности?

а)
$$f(x) = \begin{cases} c, & 0 < x < 5, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

б)
$$f(x) = \begin{cases} c(1 - |x|), & |x| < 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

в)
$$f(x) = \begin{cases} ce^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

г)
$$f(x) = ce^{-|x|}, \quad x \in \mathbf{R},$$

д)
$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x^2/2}, & x > 0, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

110. Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}. \text{ Найти значение } x_0, \text{ удовлетворяющее условию: с}$$

вероятностью $1/4$ случайная величина ξ примет значение, большее x_0 .

111. При каком значении a функция $f_{\xi}(x) = \frac{a}{1+x^2}, -\infty < x < \infty$, явля-

ется плотностью случайной величины ξ ? Найти функцию распределения

$F_{\xi}(x)$, а также вероятность $P(-1 < \xi < 1)$.

112. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения $f_{\xi}(x)$.

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \sin x, x \in [0, \frac{\pi}{3}), \\ \frac{1}{4}, x \in [2, 3), \\ \frac{1}{2}, x \in [3, 3.5), \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}.$$

Построить функцию распределения. Найти $P(-1 \leq \xi \leq 3.2)$.

113. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид

$$f_{\xi}(x) = \frac{c}{x^2} \left(1 - \cos \frac{x}{a} \right), \quad a > 0, \quad x \in \mathbf{R}^1. \text{ Найти } c = c(a).$$

114. Цена деления шкалы амперметра равна 0.1 A . Показания округляются до ближайшего деления. Найти вероятность того, что при испытании будет сделана ошибка, превышающая 0.02 A .

115. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 1.06 кг . Известно, что 5% коробок имеют массу, меньшую 1 кг . Считая, что масса коробки – нормально распределенная с.в., определить, каков процент коробок, масса которых превышает 940 г .

116. Браковка шариков для подшипников производится случайным образом: если шарик проходит через отверстие диаметром d_2 , но не проходит через отверстие диаметром d_1 , $d_1 < d_2$, то шарик считается годным.

Если какое-либо из этих условий нарушается, то шарик бракуется. Диаметр шарика - случайная величина $\xi \in N\left(\frac{d_1 + d_2}{2}, \alpha(d_2 - d_1)\right)$, где $\alpha \in (0, 0.5)$ определяет точность изготовления шариков. Каким должно быть α , чтобы брак составлял не более 2% всей продукции?

117. Случайная величина имеет нормальное распределение $\xi \in N(3, 0.5^2)$. Найти вероятность $P(1.5 \leq \xi < 2.5)$, а также $F_\xi(2)$.

118. Какова вероятность того, что в группе из 500 человек ровно 5 родились 1 апреля?

119. Известно, что левши составляют в среднем 1% от общего числа людей. Найти вероятность того, что из 200 человек окажется, по крайней мере, четверо левшей.

120. Аппаратура содержит 1000 элементов. Вероятность выхода из строя каждого из них равна 0.001. Найти вероятность выхода из строя хотя бы одного элемента. Найти вероятность этого же события, если аппаратура содержит 6 таких элементов.

121. Эксперимент состоит в том, что 200 раз подбрасывается 3 игральных кубика. Найти вероятности следующих событий: $A = \{50 \text{ раз выпадут очки, дающие в сумме 11 или 12 очков}\}$; $B = \{\text{хотя бы 7 раз сумма будет меньше 5 очков}\}$.

122. Французский ученый Бюффон бросил монету 4040 раз, причем герб выпал 2048. Найти вероятность того, при повторении опыта Бюффона относительная частота появления герба отклонится от вероятности появления герба по абсолютной величине не более чем в опыте Бюффона.

123. При выпечке булочек с изюмом случается с вероятностью 0.003, что в булочку не попадает ни одной изюминки. Оценить вероятность того, что в партии из 1000 булочек: а) нет булочек без изюминок; б) имеется ровно три булочки без изюминок; в) имеется не менее трех булочек без изюминок.

124. Каждый избиратель независимо от остальных избирателей, отдает свой голос за кандидата A с вероятностью 0.7 и за кандидата B – с вероятностью 0.3. оценить вероятность того, что в результате голосования на избирательном участке в 5000 избирателей кандидат A опередит кандидата B : а) ровно на 1900 голосов; б) не менее чем на 1900 голосов.

125. В страховой компании застрахована 1000 человек одного возраста и одной социальной группы. Вероятность смерти в течение года для каждого равна 0.006. Каждый застрахованный вносит 1 января 1200 рублей страхового взноса и в случае его смерти родственники получают 100000 рублей. Найти вероятности следующих событий: $A=\{\text{страховая компания потерпит убытки}\}$; $B=\{\text{прибыль компании будет больше 186000 рублей}\}$.

126. В некотором городе в год рождается 20000 детей. Считая вероятность рождения мальчика равной 0.51 найти такое t , чтобы с вероятностью 0.99 можно было утверждать, что среди рожденных в течение года детей число мальчиков превышает число девочек не менее чем на t .

127. Игральную кость бросают 80 раз. Найти с вероятностью 0.9973 границы, симметричные относительно среднего числа, в которых будет заключено число выпадений шестерки.

128. Водоем объема V , из которого берется проба объема V_0 , $V_0 \ll V$, содержит n опасных бактерий. Найти вероятность того, что бактерии обнаружатся в пробе воды.

129. Какое наименьшее количество раз нужно бросить 2 игральные кости, чтобы вероятность неравенства $\left| \frac{\mu}{n} - p \right| \leq 0.01$ была не меньше, чем вероятность противоположного неравенства, где μ - число появлений одинаковых цифр в n бросках?

130. В поселке 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок по случайным мотивам независимо от остальных. Какой наименьшей вместимостью должен об-

ладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит раз в сутки)?

131. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет 2 разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Входы зрители выбирают равновероятно. Рассмотреть случаи: а) зрители приходят поодиночке; б) зрители приходят парами.

132. В лотерее разыгрывается 1 выигрыш на каждую 1000 билетов. Найти вероятность того, что, имея 100 билетов, из них будет не менее 2 выигрышей.

133. В урне находятся белые и черные шары в отношении $3/2$. Производятся последовательные опыты по извлечению одного шара с возвращением. Каково минимальное число извлечений, при котором с вероятностью, большей 0.9948, можно ожидать, что отклонения относительной частоты появления белого шара от вероятности его появления в одном опыте не превысит 0.05?

134. Случайный вектор (ξ, η) имеет распределение, заданное таблицей:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Найти маргинальные распределения случайных величин ξ и η . Являются ли ξ и η независимыми? Построить совместную и маргинальные функции распределения.

135. Число ξ выбирается случайным образом из множества $A = \{1, 2, 3\}$. Затем из множества A выбирается η , большее или равное ξ . Найти совместное распределение случайного вектора (ξ, η) .

136. Три шара раскладываются по трем ящикам случайным образом так, что шары неразличимы, а ящики различимы. Случайная величина ξ - число заполненных ящиков, η - число шаров в первом ящике. Найти совместное распределение случайного вектора (ξ, η) . Рассмотреть также случай, когда шары различимы. Построить совместную функцию распределения.

137. Найти совместное распределение с.в. ξ - число гербов и η - число решек, выпадающих при подбрасывании двух монет.

138. В урне 7 красных и 3 черных шара. Из урны 2 раза извлекают по 3 шара без возвращения. Случайная величина ξ_i - число красных шаров при i -ом извлечении, $i = 1, 2$. Найти совместное распределение и совместную функцию распределения случайного вектора (ξ_1, ξ_2) .

139. Случайные величины ξ и η - независимы.
 $P(\xi = k) = P(\eta = k) = \frac{1}{m}$, $k = 1, 2, \dots, m$. Найти $P(\xi = \eta)$; $P(\xi < \eta)$; $P(\xi = k \mid \xi < \eta)$.

140. Случайный вектор (ξ, η) имеет совместную функцию распределения

$$F_{(\xi, \eta)}(x, y) = \begin{cases} 0, & \min(x, y) \leq 0; \\ \min(x, y), & 0 < \min(x, y) \leq 1; \\ 1, & \min(x, y) > 1. \end{cases}$$

Зависимы или нет случайные величины ξ и η ? Найти $P((\xi - 0,5)^2 + (\eta - 0,5)^2 \leq 0,25)$.

141. Случайный вектор (ξ, η) имеет совместную плотность распределения

$$f_{(\xi, \eta)}(x, y) = \frac{a}{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}, (x, y) \in R^2.$$

а) Найти коэффициент a . б) Установить, являются ли случайные величины ξ и η независимыми. с) Найти маргинальные плотности $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$. d) Найти вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в квадрат $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

142. Случайные величины ξ и η независимы, причем $\xi \in N\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\eta \in R(0, 1)$. Найти совместную плотность и функцию распределения случайного вектора (ξ, η) .

143. Случайный вектор (ξ, η) имеет совместную плотность распределения

$$f_{(\xi, \eta)}(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + y^2), & 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Найти коэффициент c , функцию распределения $F_\xi(x)$, а также $F_{(\xi, \eta)}(2, 3), F_{(\xi, \eta)}(1, 1)$.

144. Случайный вектор (ξ, η) имеет двумерное нормальное распределение с параметрами $a_1, a_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$. Доказать, что независимость ξ и η эквивалентна их некоррелированности.

145. Каким условиям должны удовлетворять a, b, c , чтобы при подходящем выборе нормирующего множителя A функция $f_{(\xi, \eta)}(x, y) = Ae^{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)}$ являлась плотностью распределения вероятно-

сти случайного вектора (ξ, η) на плоскости? При каких a, b, c и A случайные величины ξ и η независимы?

146. Случайные величины (ξ, η) имеют совместное распределение с плотностью

$$f_{(\xi, \eta)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right).$$

Найти маргинальные распределения случайных величин ξ и η .

147. Случайные величины (ξ, η) распределены равномерно в прямоугольнике, ограниченном абсциссами $x=0$ и $x=b$, и ординатами $y=0$ и $y=d$ ($b>0, d>0, b>d$). Найти совместную плотность и функцию распределения случайного вектора (ξ, η) , а также вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в круг с центром в точке $(0,0)$ и радиусом $r < d$.

148. Дана функция распределения с.в. (ξ, η) :

$$F_{(\xi, \eta)}(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Найти совместную и маргинальные плотности распределения и вероятность $\mathbf{P}(1 \leq \xi \leq 2, 3 \leq \eta \leq 5)$.

149. Плотность распределения случайного вектора (ξ, η) имеет вид

$$f_{(\xi, \eta)}(x, y) = \begin{cases} c(x+y), & 0 \leq x+y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

а) Определить константу c ; б) установить, зависимы или нет ξ и η ; в) проверить, какая из вероятностей $\mathbf{P}(0 < \xi < 1, \eta > 1)$ или $\mathbf{P}(0 < \xi < 1, \xi < \eta < 1)$ больше.

150. Дана плотность распределения $f_{\xi}(x)$ случайной величины ξ .

Выразить $F_{\eta}(y)$ через $F_{\xi}(x)$, если: а) $\eta = e^{2\xi}$; б) $\eta = -\ln \xi$; в) $\eta = |\xi - 1|$;

d) $\eta = -\xi^2$.

151. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения $f_{\xi}(x)$. Найти распределение случайной величины $\eta = \text{sign}\xi$.

152. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины ξ , определенная для $0 < x < \infty$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \ln \xi$.

153. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на $(0,1)$ и $0 < p < 1$ - заданное число. Найти распределение случайной величины $\eta = \left\lceil \frac{\ln \xi}{\ln(1-p)} \right\rceil$.

154. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения $f_{\xi}(x)$. Найти распределение случайной величины $\eta = \min(\xi, \xi^2)$.

155. Найти плотность распределения объема правильного тетраэдра, ребро которого - случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(0, 2)$.

156. Пусть случайная величина ξ имеет непрерывную строго монотонную функцию распределения $F_{\xi}(x)$ найти распределение случайной величины $\eta = F_{\xi}(\xi)$.

157. Какому функциональному преобразованию необходимо подвергнуть случайную величину ξ , распределенную равномерно на $(0,1)$, чтобы получить случайную величину η , распределенную по показательному закону с параметром λ ?

158. Случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром λ . Каким функциональным преобразованием ее можно превратить в случайную величину η , распределенную по закону Коши с плотностью $f_{\eta}(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$?

159. Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с вероятностью «успеха» p . Найти распределение случайной величины

$$\eta = \frac{(1 - (-1)^\xi) \xi}{2}.$$

160. Площадь квадрата – случайная величина, равномерно распределенная на $[1, 4]$. Найти распределение длины стороны квадрата. Найти вероятность того, что у 3 из 5 таких квадратов, взятых независимым образом, длина стороны будет от 1 до 1.5.

161. Из точки $A(4, 0)$ под углом t проводится луч, пересекающий ось OY . Найти плотность распределения ординаты точки пересечения луча с осью OY .

162. Случайные величины ξ и η – независимы и равномерно распределены в точках $-1, 0, 1$. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины $\zeta = \xi - \eta$.

163. Случайные величины ξ и η имеют распределение, заданное таблицей:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	0.2	0.25	0.05
1	0.3	0.1	0.1

Найти ряд распределения случайной величины $\zeta = \xi \cdot \eta$.

164. Независимые случайные величины ξ и η имеют показательное распределение с параметром λ . Найти распределение случайных величин: а) $\gamma = \xi + \eta$; б) $\zeta = \xi - \eta$.

165. Случайные величины ξ и η имеют распределение, заданное таблицей:

ξ η	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/24
1	1/3	1/6	0

Вычислить условные дисперсии $\mathbf{D}(\eta | \xi = 1)$, $\mathbf{D}(\xi | \eta = 0)$, найти распределения $\xi + \eta$, $\xi \cdot \eta$, $(\xi \cdot \eta, \xi + \eta)$.

166. Случайный вектор (ξ, η) распределен равномерно в квадрате $K = \{(x, y) : |x| \leq 0,5; |y| \leq 0,5\}$. Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \xi \cdot \eta$.

167. Рассматриваются независимые, одинаково распределенные случайные величины ξ и η , такие что $\mathbf{P}(\xi > 0) = \mathbf{P}(\eta > 0) = p$, $q = 1 - p$. Доказать, что $p^2 \leq \mathbf{P}(\xi + \eta > 0) \leq 1 - q^2$.

168. Независимые случайные величины ξ и η имеют равномерное распределение на $(0,1)$. Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \frac{\xi}{\xi + \eta}$.

169. С.в. ξ, η независимы и равномерно распределены на отрезке $[0,1]$. Найти распределение с.в. $\zeta_1 = |\xi - \eta|$, $\zeta_2 = (\xi - \eta)^2$.

170. Найти плотность распределения максимума из двух независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение с плотностью $f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2), |x| \leq 1$.

171. Найти плотность распределения минимума из двух независимых случайных величин, распределенных по показательным законам с параметрами λ_1 и λ_2 .

172. Доказать, что если независимые случайные величины ξ и η , распределены по показательному закону с параметром λ , то случайная величина $\zeta = \frac{\xi}{\xi + \eta}$ имеет равномерное распределение на $(0,1)$.

173. Случайные величины ξ и η имеют совместную плотность распределения $f_{(\xi,\eta)}(x,y)$. Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \frac{\eta}{\xi}$.

174. Случайные величины ξ и η - независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \frac{\eta}{\xi}$.

175. Каждая из независимых с.в. ξ и η имеет показательное распределение с параметром λ . Найти распределения случайных величин $\zeta_1 = \frac{\xi}{\eta}$, $\zeta_2 = \frac{\xi}{\xi + \eta}$.

176. Найти закон распределения минимума из двух независимых случайных величин, имеющих геометрическое распределение с параметрами p_1 и p_2 .

177. Построить функцию распределения суммы двух независимых одинаково распределенных случайных величин $\mathbf{P}(\xi_i = k) = \frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbf{N}$.

178. Независимые случайные величины $\xi_i \in R(a,b)$, $i=1,2$. Найти функцию распределения случайного вектора $(\eta, \zeta) = (\min(\xi_1, \xi_2), \max(\xi_1, \xi_2))$.

179. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и равномерно распределены на $[0,1]$. Найти $\mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n < x)$, $x \in [0,1]$.

180. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и имеют плотности распределения $f_{\xi_1}(x_1), f_{\xi_2}(x_2), \dots, f_{\xi_n}(x_n)$. Найти функции распределения случайных величин $\eta = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и $\zeta = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

181. Деталь обрабатывается последовательно на n станках. Время обработки каждой детали $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - независимые и одинаково распределенные по показательному закону с.в. с одинаковым параметром λ . Найти плотность распределения суммарного времени обработки детали $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, а также $E\eta, D\eta$.

182. Автомат заполняет банки кофе. Масса кофе и масса банки имеют нормальное распределение со средними 500 г. и 50 г. соответственно, и стандартное отклонение 10 г. и 2 г. Какова вероятность того, что вес готовой к продаже банки будет менее 540 г.?

183. Найти вероятность того, что масса 5 наудачу взятых пакетов с расфасованным товаром будет отклоняться от нормы не более чем на 2 г., если средняя масса одного пакета равна 1 кг., а отклонение – 1.5 г. Распределение массы пакетов считать нормальным.

184. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены равномерно на (a, b) . Найти функцию распределения и плотность случайного вектора $(\eta, \zeta) = (\max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n))$

185. В урне находятся 10 шаров, из которых 3 белых, а остальные черные. Наудачу отобрали 2 шара. Найти математическое ожидание и дисперсию числа белых шаров среди отобранных.

186. Найти математическое ожидание суммы очков, выпавшей на верхних гранях при подбрасывании n игральных костей.

187. По одному разделу курса «Теория вероятностей» у преподавателя имеется 20 задач, по второму – 21, по третьему – 24 задачи. Среди них трудных 5, 7, 6 соответственно. Студенту дали по одной задаче из каждого раздела. Случайная величина ξ - общее число трудных задач у

студента. Используя свойства математического ожидания и дисперсии, вычислить их для случайной величины ξ .

188. Диаметр круга – случайная величина, равномерно распределенная на $[a, b]$. Найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

189. Обработка результатов одной переписи показала, что возраст лиц, занимающихся научной работой, подчиняется закону, имеющему плотность $f_{\xi}(x) = k(x - 22.5)(97.5 - x)^5$, $x \in [22.5; 97.5]$. Определить, во сколько раз число научных работников в возрасте ниже среднего превышает число работников в возрасте выше среднего.

190. При каком значении c функция $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 1 - \frac{c}{x}, & x > 1 \end{cases}$ служит

функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины? Найти в этом случае плотность вероятности и математическое ожидание.

191. Случайная величина $\xi \in B(n, p)$. Используя свойства математического ожидания и дисперсии, доказать, что $E\xi = np$, $D\xi = npq$.

192. Пусть случайная величина ξ – число машин, подъезжающих к светофору за промежуток времени с интенсивностью λ в единицу времени, имеет распределение Пуассона с параметром λ . Найти $E\xi$, $D\xi$.

193. Вероятность изготовления годной детали из каждой отливки независимо от других равна p . Случайная величина ξ – число использованных отливок для изготовления одной годной детали. Найти $E\xi$, $D\xi$.

194. В лотерее имеется N билетов, среди которых m_1 выигрышей стоимости k_1 , m_2 выигрышей стоимости k_2 и т.д. m_n выигрышей стоимости k_n . Какую стоимость билета следует установить, чтобы математическое ожидание выигрыша на один билет равнялось половине его стоимости?

195. Игра состоит в подбрасывании монеты до появления первого «герба». Если «герб» выпал при k -ом бросании, то первый игрок получает k рублей от второго. Сколько должен уплатить первый игрок второму перед началом игры, чтобы игра была безобидной, т.е. математическое ожидание выигрыша равнялось 0 для каждого игрока?

196. Найти математическое ожидание минимума независимых с.в. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, каждая из которых распределена равномерно на интервале (a, b) .

197. Правомерно ли следующее рассуждение: «От дома до работы 1 км., хожу я в среднем со скоростью 5 км/ч, следовательно, в среднем на дорогу у меня будет уходить 12 минут»?

198. Некоторое насекомое откладывает m яиц с интенсивностью λ за единицу времени (число отложенных яиц подчиняется закону Пуассона с параметром λ), а вероятность развития насекомого из яйца равна p . Предполагая взаимную независимость развития яиц, показать, что среднее число новых насекомых равно λp .

199. Монета подбрасывается до тех пор, пока впервые не выпадет «ГР». Найти среднее число бросаний.

200. Доказать, что для целочисленной неотрицательной случайной величины ξ $E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq k)$.

201. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины с функцией распределения: $F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{1}{7}(2x-1), & 1 < x \leq 3, \\ \frac{6}{7}, & 3 < x \leq 7, \\ 1, & x > 7 \end{cases}$.

202. Функция распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ \frac{k}{n}, & x \in (k, k+1], k = \overline{1, n-1}; \\ 1, & x > n. \end{cases}$$

Найти $E\xi$, $D\xi$.

203. Найти моменты, моду, медиану для случайной величины ξ , распределенной по закону Коши с плотностью $f_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

204. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид $f_{\xi}(x) = ae^{-|x|}$. Найти коэффициент a , $E\xi$, $D\xi$ асимметрию и эксцесс.

205. На молодежную газету в среднем подписывается 25% студентов. Чему равно наиболее вероятное число подписчиков этой газеты на потоке, насчитывающем: а) 100 студентов; б) 103 студента?

206. Найти наивероятнейшее число выпадений «3» при шести подбрасываниях игральной кости. Решить задачу в случае n независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом.

207. Найти наивероятнейшее значение случайной величины ξ , распределенной по закону Пуассона с параметром λ .

208. Найти квантиль порядка p и моду случайной величины ξ , имеющей распределение Вейбулла с функцией распределения $F_{\xi}(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^{\alpha}}{\beta}\right)$, $x \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, которая в некоторых случаях характеризует срок службы элементов электронной аппаратуры.

209. Случайная величина ξ имеет плотность

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 2\cos(2x), & x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right); \\ 0, & x \notin \left(0, \frac{\pi}{4}\right). \end{cases} \text{ Найти моду и медиану.}$$

210. Функция распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -a; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}, & -a < x \leq a; \\ 1, & x > a; \end{cases} \quad a > 0. \text{ Найти моду и медиану.}$$

211. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром λ . Найти асимметрию и квантили.

212. Найти эксцесс случайной величины ξ , равномерно распределенной на интервале (a, b) .

213. Найти критическую точку порядка $3/4$ для стандартного нормального распределения.

214. Случайный вектор (ξ, η) имеет распределение, заданное таблицей:

$\xi \backslash \eta$	1	2	3
-1	0. 1	0. 2	0. 1
1	0. 3	0. 2	0. 1

Найти: а) центр рассеивания ($E\xi$, $E\eta$); б) разброс по обеим осям ($D\xi$, $D\eta$); в) коэффициент корреляции ρ ; г) $D(\xi + \eta)$.

215. Случайная величина ζ имеет показательное распределение с параметром λ . Вычислить коэффициент корреляции с.в. ξ, η , если: а) $\xi = 2\zeta + 3$, $\eta = 3\zeta - 1$; б) $\xi = \zeta + 1$, $\eta = \zeta^2 - 1$; в) $\xi = 2 + \zeta$, $\eta = 5 - \zeta$; г) $\xi = \zeta^2$, $\eta = \zeta^2 - \zeta$.

216. Случайная величина ξ распределена равномерно на $(-2,4)$; второй начальный момент случайной величины η равен 5, $E\eta = 1$, $\rho(\xi, \eta) = 0.5$. Найти $D(\xi + \eta)$.

217. Случайный вектор (ξ, η) распределен равномерно в треугольнике с вершинами в точках $(-1,0)$, $(1,2)$ и $(1,0)$. Найти центр рассеивания.

218. В урне находятся 3 белых и 2 черных шара. Два игрока извлекают по 2 шара без возвращения. Случайная величина ξ - число белых шаров у первого игрока, η - число белых шаров у второго. Построить матрицу ковариаций случайных величин ξ и η .

219. Случайные величины (ξ, η) распределены равномерно в квадрате, диагонали которого совпадают с осями координат и стороной $\sqrt{2}$. Зависимы ли случайные величины ξ и η ? Коррелированы ли они?

220. Построить ковариационную матрицу для случайного вектора (ξ, η) , имеющего плотность распределения $f_{(\xi, \eta)} = \frac{2}{\pi(x^2 + y^2 + 1)^3}$.

221. Есть две случайные величины ξ и η , связанные соотношением $\eta = 2 - 3\xi$, причем $E\xi = -1$, $D\xi = 4$. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины η ; коэффициенты ковариации и корреляции величин ξ и η .

222. Плотность распределения случайного вектора (ξ, η) равна
$$f_{(\xi, \eta)} = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Найти $\text{cov}(\xi, \eta)$.

223. Подбрасывается игральная кость. Если на ней выпадает цифра ζ , то ζ раз подбрасывается монета. Пусть при этом герб выпадает ξ раз, а решка - η раз. Вычислить коэффициент корреляции случайных величин ξ и η .

224. Найти коэффициент корреляции между количеством выпадения единиц и шестерок при n подбрасываниях игральной кости.

225. Случайный вектор (ξ, η) имеет распределение, заданное таблицей:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	0. 3	0. 1	0. 1
1	0. 2	0. 2	0. 1

Найти условные распределения $\mathbf{P}(\xi = k | \eta = j)$, $k = -1, 0, 1$, $j = -1, 1$, а также условные математические ожидания и дисперсии $\mathbf{E}(\xi | \eta = j)$, $\mathbf{D}(\xi | \eta = j)$, $j = -1, 1$.

226. Плотность распределения случайного вектора (ξ, η) равна

$$f_{(\xi, \eta)} = \begin{cases} c(x + y), & 0 \leq y + x \leq 2, x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Найти $\mathbf{E}(\xi | \eta = y)$ и $\mathbf{E}(\eta | \xi = x)$.

227. Случайные величины ξ и η независимы, $\mathbf{P}(\xi = k) = \mathbf{P}(\eta = k) = pq^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Найти $\mathbf{P}(\xi = k | \xi = \eta)$ и $\mathbf{P}(\xi = k | \xi > \eta)$.

228. Плотность распределения случайного вектора (ξ, η) равна $f_{(\xi, \eta)}(x, y) = k \exp(-4x^2 - 6xy - 9y^2)$, $x, y \in R$.
Найти коэффициент k , $f(x | y)$ и $f(y | x)$.

229. Доказать формулу полного математического ожидания $\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi | \eta)) = \mathbf{E}\xi$, когда ξ и η - дискретные случайные величины.

230. Независимые случайные величины ξ и η распределены по закону Пуассона с параметрами λ и μ соответственно. Доказать, что

$$P(\eta = m | \xi + \eta = n) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n, \quad \text{где } p = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = 1 - q.$$

231. Каждая из независимых случайных величин ξ и η имеет геометрическое распределение с параметром p . Доказать, что

$$P(\xi = k | \xi + \eta = n) = \frac{1}{n-1}, \quad n > k \geq 1.$$

232. На отрезок $[0, a]$ брошено 3 точки, координаты которых ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и равномерно распределены на $[0, a]$. Найти функцию распределения случайного вектора (ξ_1, ξ_2) при условии, что $\xi_3 = z \leq \min(\xi_1, \xi_2)$, $z \in (0, a)$.

233. Подбрасывают игральную кость, на ней выпадает ξ очков. Затем она подбрасывается еще ξ раз. Найти математическое ожидание суммы выпавшего числа очков в этих ξ бросаниях.

234. Случайные величины $\xi_i, i = 1, 2, \dots$, независимы и одинаково распределены, $E\xi_i = a$, $D\xi_i = b$, $i = 1, 2, \dots$. Найти математическое ожидание и дисперсию η слагаемых ξ_i , где для случайной величины η известны $E\eta$ и $D\eta$.

235. Точка ξ_1 выбирается наудачу из $(0, 1)$, затем ξ_2 наудачу из $(\xi_1, 1)$, ξ_3 из $(\xi_2, 1), \dots$, точка ξ_n наудачу из $(\xi_{n-1}, 1)$. Найти $E\xi_n$.

236. Найти характеристическую функцию $\varphi(z)$ дискретной случайной величины, подчиняющейся закону распределения Паскаля

$$P(\xi = m) = \frac{a^m}{(a+1)^{m+1}}, \quad a > 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

По $\varphi(z)$ найти $E\xi$ и $D\xi$.

237. Найти х.ф. числа появлений события A при n независимых испытаниях, если вероятность появления события A от испытания к испытанию меняется и для k -го испытания равна P_k , $k = 1, 2, \dots, n$.

238. Найти характеристическую функцию отрицательного биномиального распределения $P(\xi = k) = C_{l+k-1}^k p^l q^k$, $k = 0, 1, \dots$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, l – задано.

239. Случайная величина ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Найти ее характеристическую функцию $\varphi(z)$.

240. Доказать, что ни одна из данных функций не относится к характеристическим функциям:

- а) $\varphi(t) = 1 - \sin t$;
- б) $\varphi(t) = \cos t - \sin t$;
- в) $\varphi(t) = e^{i|t|}$;
- г) $\varphi(t) = \cos t^2$.

241. Используя свойства характеристической функции, выяснить, могут ли следующие функции являться характеристическими:

- а) $\varphi(z) = \sin(bz)$, $b \in \mathbf{R}$;
- б) $\varphi(z) = \sin(z^2)$;
- в) $\varphi(z) = 1 - iz$;
- г) $\varphi(z) = \frac{1}{1+z}$;
- д) $\varphi(z) = e^{-|z|}$;
- е) $\varphi(z) = \begin{cases} (1+z^2)^{-1}, & z \leq 0 \\ e^{-2z}, & z > 0 \end{cases}$;
- ж) $\varphi(z) = \begin{cases} 1-|z|, & |z| \leq 1 \\ 0, & |z| > 1 \end{cases}$.

242. Пусть случайная величина ξ - порядковый номер первого из испытаний в схеме Бернулли, которое закончилось «успехом». Найти производящую функцию $\psi_\xi(z)$ и математическое ожидание $E\xi$.

243. Случайная величина ξ распределена по закону Пуассона с параметром λ и не зависит от результатов испытаний в схеме Бернулли с вероятностью «успеха» p . Пусть случайная величина η_ξ - число «успехов» в первых ξ испытаниях. Найти производящую функцию $\psi_{\eta_\xi}(z)$ случайной величины η_ξ , а также $E\eta_\xi$ и $D\eta_\xi$.

244. Случайная величина ξ равномерно распределена в точках $0, 1, 2, \dots, n-1$. Найти производящую функцию $\psi_\xi(z)$ случайной величины ξ , $E\xi$ и $D\xi$.

245. Случайная величина ξ принимает значения $0, 1, 2, \dots$. Производящая функция случайной величины ξ равна $\psi_\xi(z)$. Выразить через $\psi_\xi(z)$ производящую функцию $\psi_\eta(z)$ случайной величины η , где $P(\eta = k) = P(\xi > k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

246. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и η независимы и принимают значения $0, 1, 2, \dots$. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ одинаково распределены с производящей функцией $\psi_\xi(z)$. Случайная величина η имеет биномиальное распределение с параметрами n и p . Рассмотрим последовательность $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$, $k = \overline{1, n}$. Найти производящую функцию $\psi_{S_n}(z)$ случайной величины S_n .

247. Для некоторого автопарка среднее число автобусов, отправляемых в ремонт после месяца эксплуатации равно 5. Оценить вероятность того, что по истечении месяца будет отправлено в ремонт менее 15 автобусов, если: а) информация о дисперсии отсутствует; б) дисперсия равна 4.

248. В предположении, что размер одного шага пешехода равномерно распределен в интервале (70, 80) см. и размеры шагов независимы, найти вероятность того, что за 10000 шагов пешеход пройдет расстояние от 7.49 до 7.51 км.

249. В очереди на получение денег в кассу стоит 60 человек, размер выплаты каждому – случайная величина. Средняя выплата составляет 300 руб., среднеквадратическое отклонение- 50 руб. Выплаты отдельным получателям независимы. Сколько должно быть денег в кассе, чтобы их с вероятностью 0.95 хватило на выплату всем 60 получателям?

250. Оценить вероятность того, что при 1000 бросаниях монеты число выпадений «герба» будет заключено между 450 и 550, используя: а) интегральную теорему Муавра-Лапласа; б) неравенство Чебышева.

251. Сколько раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.975 можно было утверждать, что относительная частота выпадения «герба» попадет в интервал (0.4, 0.6). Получить оценки с помощью: а) интегральной теоремы Муавра-Лапласа; б) неравенства Чебышева.

252. Число солнечных дней в году для данной местности есть случайная величина ξ со средним значением равным 100 и среднеквадратическим отклонением равным 20. Оценить сверху $P(\xi \geq 150)$.

253. Складывают 1000 чисел, каждое из которых округлено до 0.001. Предполагая, что ошибки округления – независимые случайные величины с равномерным на $(-0.0005, 0.0005)$ распределением, найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором с вероятностью 0.998 заключена суммарная ошибка.

254. Вычисление интеграла $\int_0^1 x^2 dx$ производится методом Монте-

Карло (метод Монте-Карло – метод статистических испытаний) на основании 10000 независимых испытаний. Найти вероятность того, что относительная погрешность вычисления не превзойдет 1%.

255. По данным веса полугодовалых детей построить гистограмму (m_i - масса ребенка, кг.; n_i - количество детей).

m_i	n_i	m_i	n_i
9.0- 9.2	3	10.4 -10.6	1 8
9.2- 9.4	6	10.6 -10.8	1 5
9.4- 9.6	7	10.8 -11.0	1 0
9.6- 9.8	1 2	11.0 -11.2	6
9.8- 10.0	1 6	11.2 -11.4	5
10.0 -10.2	2 0	11.4 -11.6	5
10.2 -10.4	2 5	11.6 -11.8	2

256. По выборке значений случайной величины ξ - время, которое пройдет до первой ошибки у человека, совершающего монотонную работу (в часах). Построить эмпирическую функцию распределения и гистограмму:

0.0025; 0.0100; 0.0450; 0.0550; 0.0625; 0.1050; 0.1175; 0.1400;
0.1675; 0.1750; 0.1900; 0.2075; 0.2175; 0.2500; 0.2525; 0.2575;
0.3300; 0.3425; 0.3750; 0.3850; 0.4275; 0.5250; 0.6150; 0.6250;
1.0175.

257. Промежутки между временами прибытия судов в морской порт представлены в таблице (t_i - промежуток времени между прибытием судов, мин.; n_i - число случаев):

t_i	n_i	t_i	n_i
0	6	1	1
-4	7	6-20	1
4	4	2	7
-8	3	0-24	
8	3	2	5
-12	0	4-28	
1	1	2	4
2-16	8	8-32	

Построить гистограмму и сравнить ее с графиком функции $y(x) = c \cdot \exp(-x/b)$, $x > 0$.

258. Двадцать работников одной компании проходили тест, оценивающий уровень тревожности. Были получены следующие результаты в условных баллах (вариационный ряд): 51, 52, 52, 53, 54, 54, 55, 57, 60, 60, 61, 62, 62, 63, 65, 66, 69, 70, 72, 74. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

259. Эксперимент, определяющий скорость (в ед./сек.) написания арабских цифр дал следующие результаты:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
5.9	3.1	3.6	3.4	2.1	4.5	2.8	2.8	2.9	5.0

Найти выборочное среднее, выборочную и исправленную дисперсии, выборочную моду и медиану.

260. Проверить несмещенность и состоятельность оценки математического ожидания, в качестве которой взято $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ по выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$ из генеральной совокупности с конечными математическим ожиданием и дисперсией.

261. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ выборка из распределения с известным математическим ожиданием m и неизвестной дисперсией D . Показать, что несмещенной оценкой дисперсии D будет статистика $S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$.

262. Показать, что выборочное среднее, вычисленное по выборке из генеральной совокупности, имеющей распределение Пуассона с параметром λ , будет несмещенной, эффективной и состоятельной оценкой этого параметра λ .

263. Пусть $f_\xi(x, \theta) = \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}$, $0 \leq x \leq 1, \theta > 0$. Найти какую-нибудь состоятельную оценку для θ по выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$.

264. Пусть k - число «успехов» в одной серии из m независимых испытаний с вероятностью «успеха» p . Найти ОМП (оценку максимального правдоподобия) для p . Показать, что она является несмещенной, состоятельной, эффективной оценкой.

265. Показать, что относительная частота появления события A в n независимых испытаниях является эффективной оценкой вероятности p появления события в одном испытании.

266. Отказ прибора произошел при k -ом ($k = 1, 2, \dots$) испытании. Найти ОМП вероятности отказа p при одном испытании и выяснить ее несмещенность.

267. Показать, что $\hat{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ является смещенной оценкой дисперсии σ^2 , где $x_1, x_2, \dots, x_n$ - повторная выборка. Найти смещение.

268. Показать, что $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ является несмещенной оценкой генеральной дисперсии σ^2 , где $x_1, x_2, \dots, x_n$ - повторная выборка.

269. По выборке $x_1, \dots, x_n$ найти методом моментов оценку параметра a равномерного на интервале $(-a, a)$ распределения.

270. Результаты ошибок измерения дальности радиодальномером имеют равномерное на (a, b) распределение и представлены в таблице (n_i - число наблюдений):

x_i	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

Найти по методу моментов оценки параметров a и b .

271. Число столкновений с молекулами газа в камере Вильсона частиц, получающихся при распаде ядра урана в результате бомбардировки его нейтронами, имеет «двойное» распределение Пуассона

$$P(\xi = k) = \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_1^k e^{-\theta_1}}{k!} + \frac{\theta_2^k e^{-\theta_2}}{k!} \right), k = 0, 1, \dots, 0 < \theta_1 < \theta_2.$$

Найти методом моментов оценки параметров θ_1, θ_2 по выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$.

272. Дана выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$ из нормального распределения $N(\theta, \sqrt{2\theta})$. Найти оценку МП параметра θ .

273. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ - результаты n независимых наблюдений над случайной величиной ξ , ряд распределения которой имеет вид:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
$\alpha \frac{1-\theta_1}{1-\alpha}$	$\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \frac{1-\theta_1}{1-\alpha}$	$\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \frac{1-\theta_1}{1-\alpha}$	$\theta_1 \theta_2$	$\theta_1 (1-\theta_2)$

где $\alpha \in (0, 0.5)$ - известно, $\theta_i \in (0, 1), i = 1, 2$, n_j - число элементов выборки, равных $k_j, j = \overline{1, 5}$. Найти ОМП $\theta_i, i = 1, 2$.

274. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ - результаты $n = 25$ повторных независимых наблюдений над случайной величиной ξ , имеющей нормальное распределение с неизвестным параметром a и известным параметром $\sigma = 5$.

Указать интервал, который с вероятностью 0.95 покрывает истинное значение неизвестного параметра, если $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 14$.

275. При определении угла используют среднее арифметическое нескольких замеров, причем среднеквадратическое отклонение каждого замера равно 1.5 минуты. Найти минимальное количество замеров, которое необходимо произвести, чтобы погрешность результата с вероятностью 0.99 не превосходила 1 минуты. Предполагается, что измерения имеют нормальное распределение.

276. Построить 95%-ый доверительный интервал для вероятности попадания в цель, если в результате 300 независимых выстрелов в цель попало 85 снарядов.

277. Содержание углевода в единице продукта подчиняется нормальному распределению с неизвестным математическим ожиданием и неизвестной дисперсией. По результатам 25 независимых наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_{25}$ были получены оценки математического ожидания $\bar{x} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} x_i = 18$ (г.) и дисперсии $\hat{D} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 = 15.36$ (г²). Построить доверительный интервал надежности 0.99 для математического ожидания.

278. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ - выборка из нормального распределения генеральной совокупности с известным математическим ожиданием a и неизвестной дисперсией σ^2 . Найти доверительный интервал заданной надежности α для неизвестной дисперсии.

279. Пусть 3.23; 1.10; 0.06; 3.17; 2.22; 2.94; 4.15; 1.08; 4.25; 2.79; 1.04; 2.36; 0.11; 3.32 – выборка из нормального распределения. Построить доверительные интервалы надежности 0.95 для a и σ^2 .

280. Пусть 9.1; 9.2; 9.55; 9.6; 9.7; 9.95; 10; 10.1; 10.3; 10.55; 10.7; 10.8; 11; 11.1; 11.45; 11.65 – выборка из нормального распре-

деления с $a = 10.1$. Найти с надежностью 0.99 доверительный интервал для σ^2 .

ОТВЕТЫ

1. $P(A) = 1/6$; $P(B) = 5/9$; $P(C) = 13/18$ 2. $P(A) = 1/125$; $P(B) = 1/25$; $P(C) = 12/125$; $P(D) = 36/125$. 3. $P(A) = 0.504$; $P(B) = 0.432$; $P(C) = 0.036$; $P(D) = 0.027$; $P(E) = 0.001$; $P(F) = 0.0001$. 4. а) 0.1; б) 0.18. 6. $\frac{10}{19}$.
7. $P(A) = 0.5$; $P(C) = 0.7$; $P(B) = 0.3$. 8. а) $2/165$; б) $2/165$; в) $2/231$; г) $1/231$. 9. $7/15$; $17/24$. 10. а) $1/58905$; б) $992/19635$; в) $56/6545$; г) $729/6545$. 11. $\frac{81}{1001}$. 12. $P(A) = 1/60$; $P(B) = 2/5$; $P(C) = 3/5$; $P(D) = 2/5$.
14. а) $5/9$; б) $5/72$; в) $91/216$; г) $1/6$; д) $1/36$; е) $1/36$. 15. ≈ 0.00005372 .
16. $1/2$. 17. $4/9$. 18. 3. 19. $\frac{6(n-3) + (n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}$. 20. $\frac{2(k-1)(n-k)}{n(n-1)}$.
21. а) 0.5; б) $\frac{n-1}{2n}$. 23. а) $\frac{2}{n}$; б) $\frac{2}{n-1}$. 24. а) 0.2; б) 0.4; в) 0.04. 25. $1/k$.
26. $P(A) = \frac{1}{(2n-1)!!}$; $P(B) = \frac{n!}{(2n-1)!!}$. 28. $1/3$. 29. $P_3 > P_2$. 30. $1/4$. 31. $6/19$.
32. $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. 33. а) 1; б) 0; в) 0. 34. 0.25. 35. а) $\frac{39}{400}$; б) $\frac{111}{400}$. 36. а) 0.5; б) 0.75.
37. $\frac{5 + \sqrt{10}}{3}d$. 38. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)$. 40. $1/6$; 0; $5/6$. 41. $\frac{2l}{a\pi}$. 42. ≈ 0.03 .
44. $P(A) = 11/125$; $P(B) = 13/25$; $P(C) = 12/25$; $P(D) = 42/125$; $P(E) = 2133/3125$; $P(F) = 192/625$. 45. $1/3$. 50. $6/7$. 51. а) $\frac{1}{32}$; б) $\frac{1}{16}$; в) $\frac{31}{32}$.

52. 0.72775. 53. a) 0.672; b) 0.988; c) 0.8736; d) 0.6408. 54. 0.1.

55. a) $\frac{2}{5355}$; b) $\frac{1}{2916}$. 56. 0.166. 58. 0.5 59. 0.507. 60. 19/28. 61. 13/41.

62. 15/23. 63. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1 - e^{-1} \approx 0.6321$. 64. $n \geq 25$. 65. p . 66. p . 67. $\frac{228}{253} \approx 0.9$.

68. 5/8. 69. 0.05; 0.25. 70. $\frac{m}{m+k}$. 71. $\frac{528}{5915} \approx 0.089$. 73. 0.75.

75. $p_0(1-p)^n + (1-p_0)np(1-p)^{n-1}$. 76. $\frac{k(k-1)(3n-2k-2)}{n(n-1)(n-2)}$.

77. $\frac{(n-m+1)(n-m)}{2n(n-1)}$. 78. 2/3. 79. 3/19. 80. $\frac{2a}{1+a-b}$. 81. к первой. 82. 8/11.

83. 4/11. 84. 0,857. 85. 2/11. 86. 5/11. 87. $\frac{n^k}{C_n^1 + 2^k C_n^2 + \dots + n^k C_n^n}$. 88. 1 бе-

лый; 3 черных и 2 белых. 89. 0.57; 0.78. 95. $\frac{11}{42}$. 96. 13. 98. 3/16. 99. $\lambda \geq 5$.

100. 0.6651; 0.6187; 0.5973.

101.

ξ	0	1	2	3
p	14/63	32/63	15/63	2/63

102. $\frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^s}{s!}$.

104.

ξ	2	3	4
p	0.36	0.288	0.352

105.

ξ	0	1	2
p	25/72	34/72	13/72

106.

ξ	2	3	4	5
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{216}$	$\frac{5}{216}$	$\frac{25}{27}$

107.

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

110. 2. **111.** $a = \frac{1}{\pi}$; $F_{\xi}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg x$; $\frac{1}{2}$. **113.** $c = \frac{a}{\pi}$. **112.** 17/20 **114.** 0.6.

115. 99.95%. **116.** $\alpha \in (0; 0.214)$. **117.** 0.1573; 0.0228. **118.** ≈ 0.01 . **119.** 0.11.

121. $P(A) \approx 0.0725$; $P(B) \approx 0.0909$. **122.** 0.6212. **123.** а) ≈ 0.05 ; б) ≈ 0.22 ; в) ≈ 0.58 **124.** а) ≈ 0.0038 ; б) ≈ 0.9382 . **125.** $P(A) \approx 0.020091$; $P(B) \approx 0.95738$.

126. $t = 73$. **127.** $4 \leq \mu \leq 23$. **128.** $1 - \exp\left(-\frac{nV_0}{V}\right)$. **129.** 625. **130.** 547.

131. а) 537; б) 552. **132.** 0.00468. **133.** 753. **139.** $\frac{1}{m}$; $\frac{m-1}{2m}$; $\frac{2(m-k)}{m(m-1)}$. **140.** за-

висимы; $\sqrt{2}/2$. **141.** а) $a = \frac{1}{\pi^2}$; б) независимы; в) $f_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$,

$f_{\eta}(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$; д) $\frac{1}{4}$. **142.** $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, $x \in R$, $y \in (0, 1)$;

$F(x, y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ y(\Phi(\sqrt{2}x) + 0,5), & y \in (0, 1], x \in R. \end{cases}$ **145.** $c > 0$, $a > 0$; независимы, ес-

ли $A = \frac{\sqrt{ac}}{\pi} e^{-b^2/a}$. **149.** а) $c = \frac{3}{8}$; б) зависимы; в) первая вероятность больше.

150. а) $F_\eta(y) = F_\xi\left(\frac{\ln y}{2}\right)$, $y > 0$; б) $F_\eta(y) = 1 - F_\xi(e^{-y})$;

в) $F_\eta(y) = F_\xi(y+1) - F_\xi(1-y)$, $y > 0$; д) $F_\eta(y) = 1 - F_\xi(\sqrt{-y}) + F_\xi(-\sqrt{-y})$, $y < 0$;

1, $y \geq 0$. **151.** $P(\eta = -1) = F_\xi(0)$, $P(\eta = 1) = 1 - F_\xi(0)$.

153. $P(\eta = k) = pq^k$, $q = 1 - p$, $k = 0, 1, 2, \dots$ **154.** $f_\eta(y) = \begin{cases} f_\xi(y), & y \notin (0, 1]; \\ \frac{f_\xi(y)}{2\sqrt{y}}, & y \in (0, 1] \end{cases}$.

156. $f_\eta(y) = 1$, $0 < y < 1$. **157.** $\eta = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \xi)$. **158.** $\eta = \operatorname{ctg}(\pi e^{-\lambda \xi})$.

159. $P(\eta = 0) = \frac{q}{1+q}$; $P(\eta = 2k-1) = pq^{2k-2}$, $k = 1, 2, \dots$

160. $f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}y, & y \in [1, 2]; \\ 0, & y \notin [1, 2], \end{cases}$; $P(A) = 0,24615$.

161. $f_\eta(y) = \frac{4}{\pi(16+y^2)}$. **164.** а) $f_\gamma(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$, $z > 0$; б) $f_\zeta(z) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|z|}$.

166. $f_\zeta(z) = \begin{cases} -2 \ln|4z|, & |z| \leq 0,25, z \neq 0; \\ 0, & |z| > 0,25. \end{cases}$

168. $f_\zeta(z) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-z)^2}, & 0 < z \leq 0,5; \\ \frac{1}{2z^2}, & 0,5 < z \leq 1; \\ 0, & z \notin (0,1]. \end{cases}$

$$169. f_{\zeta_1}(z) = 2(1-z), z \in (0,1); f_{\zeta_2}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} - 1, z \in (0,1)$$

$$170. f(z) = \begin{cases} \frac{9}{8}(1-z^2)\left(z - \frac{z^3}{3} + \frac{2}{3}\right), & |z| \leq 1; \\ 0, & |z| > 1. \end{cases} \quad 171. f(z) = (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z}, z > 0.$$

$$173. f_{\zeta}(z) = -\int_{-\infty}^0 x f(x, zx) dx + \int_0^{\infty} x f(x, zx) dx. \quad 174. f_{\zeta}(z) = \frac{1}{\pi(z^2 + 1)}.$$

$$175. f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, x > 0 \quad 176. \text{геометрическое с параметром } (1 - q_1 q_2).$$

$$180. F_{\eta}(z) = \prod_{i=1}^n F_{\zeta_i}(z); F_{\zeta}(z) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{\zeta_i}(z)). \quad 181. f_{\eta}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$t > 0, E\eta = \frac{n}{\lambda}, D\eta = \frac{n}{\lambda^2} \quad 182. \approx 0.1635. \quad 183. 0,438. \quad 185. E\xi = \frac{3}{5}, D\xi = \frac{28}{75}.$$

$$186. 3.5n \quad 187. E\xi = \frac{5}{6}, D\xi = \frac{43}{72} \quad 188. E\eta = \frac{\pi}{12}(a^2 + ab + b^2),$$

$$D\eta = \frac{\pi^2}{144}(a^2 + ab + b^2)^2. \quad 189. \text{в } 1.2 \text{ раза.} \quad 192. E\xi = \lambda, D\xi = \lambda.$$

$$193. E\xi = \frac{1}{p}, D\xi = \frac{1-p}{p^2}. \quad 194. X = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^n k_i m_i. \quad 195. 2 \text{ рубля.} \quad 196. \frac{b+na}{n+1}.$$

$$199. 4. \quad 201. E = \frac{19}{7}, D = \frac{520}{147}. \quad 202. E\xi = \frac{n+1}{2}, D\xi = \frac{n^2-1}{12}. \quad 203. \text{моментов не}$$

$$\text{существует; } 0; x_{0.5} = 0. \quad 204. a = 0.5, E\xi = 0, D\xi = 2, As = 0, Ek = 3. \quad 205.$$

$$\text{a) } 25; \text{ б) } 25, 26. \quad 206. 1. \quad 207. \lambda - 1 \leq k \leq \lambda. \quad 208. x_p = (-\beta \ln(1-p))^{1/\alpha};$$

$$\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\beta\right)^{1/\alpha}. \quad 209. \text{не существует; } x_{0.5} = \frac{\pi}{12}. \quad 210. \text{не существует; } x_{0.5} = 0.$$

$$211. 3; x_{0.25} = \frac{-\ln(0.75)}{\lambda}; x_{0.75} = \frac{-\ln(0.25)}{\lambda}. \quad 212. -1.2. \quad 213. -0.675.$$

$$214. \text{a) } (E\xi, E\eta) = (1.8; 0.2); \text{ б) } (D\xi, D\eta) = (0.56; 0.96); \text{ в) } \rho(\xi, \eta) = -0.22;$$

$$\text{г) } D(\xi + \eta) = 1.2. \quad 215. \text{a) } 1; \text{ б) } \frac{2}{\sqrt{5}}; \text{ в) } -1; \text{ г) } \frac{10-2\lambda}{\sqrt{5(\lambda^2-8\lambda+20)}}.$$

216. $D(\xi + \eta) = 7 + 2\sqrt{3}$. **217.** $(E\xi, E\eta) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. **218.** $K = \begin{pmatrix} 0.36 & -0.24 \\ -0.24 & 0.6 \end{pmatrix}$.

219. зависимы, некоррелированы. **220.** $K = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$. **221.** $E\eta = 5$,

$D\eta = 36$, $COV(\xi, \eta) = -12$, $\rho(\xi, \eta) = -1$. **223.** $-\frac{1}{11}$. **224.** $-\frac{1}{5}$.

227. $P(\xi = k / \xi = \eta) = p(1+q)q^{2k-2}$, $P(\xi = k / \xi > \eta) = p(1+q)q^{k-2}(1-q^{k-1})$.

228. $k = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$, $f(x/y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-(2x + 1.5y)^2)$,

$f(y/x) = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \exp(-(x + 3y)^2)$. **233.** 12.25. **234.** $E\left(\sum_{i=1}^{\eta} \xi_i\right) = a \cdot E\eta$,

$D\left(\sum_{i=1}^{\eta} \xi_i\right) = b \cdot E\eta + a^2 \cdot D\eta$. **235.** $E\xi_n = 1 - \frac{1}{2^n}$. **236.** $\varphi(z) = \frac{1}{a+1-ae^{iz}}$, $E\xi = a$,

$D\xi = a^2 + a$. **238.** $\varphi(z) = \frac{p^l}{(1-qe^{iz})^l}$.

239. $\varphi(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов.– М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2006.-573 с.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах.– М.: Мир, 1984.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. прикладные задачи теории вероятностей. – М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.
4. Кочетков Е.С., Смерчинская С.О. Теория вероятностей в задачах и упражнениях: Учеб. пособие – М.: ФОРУМ: ИНФРА–М, 2005.–480 с.
5. Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., Зубков А.М. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Наука, 1980. –222 с.
6. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах: Учеб. пособие для вузов/ В.А. Ватулин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев и др.– М.: Дрофа, 2003. –328 с.
7. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для втузов/ Под ред. А.В. Ефимова. – М.: Наука, 1990.– 428 с.

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Составители:

Ярошук Марина Владимировна, **Жарков** Николай Владимирович

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования «Нижегородский государственный
университет им. Н.И.Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60 × 84 1/16.

Печать офсетная. Бумага оберточная. Усл.-печ. л. 3,25.

Заказ . Тираж 300 экз.. Бесплатно.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И.Лобачевского

603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37

Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01